András Ferenc

Véges automaták mint a magyarázat és realitás modelljei

Néhány bevezető megjegyzés

A szemantikai körbenforgás jelensége nem tévesztendő össze a Petitio principii néven ismert érvelési hibával, amikor a kiinduló állítások között bújtatva szerepel a bizonyítani kívánandó állítás maga is. Az utóbbi érvelési hibával most nem foglalkozom, és a szemantikai körbenforgás esetei közül is csak azokat vizsgálom, amikor a probléma az igazságértékkel kapcsolatos. A továbbiakban 'szemantikailag körbenforgó gondolat, igazságérték körbenforgást tartalmazó elmélet, körbenforgó logikai szerkezetű mondat, körbenforgó gondolat' alatt mindig egyfajta szemantikai körbenforgást, az igazság önmagától való függését értem. Alapgondolatom az, hogy az igazságérték önmagától való függése modellálható visszacsatolt véges automatákkal. Látni fogjuk, a modell gyanánt szolgáló véges automaták típusai adják meg a választ arra kézenfekvő kérdésre, hogy vajon mikor okoz gondot, és mikor nem, a talányos mondatok igazságértékének önmagától függő mivolta.

Mi a véges automata?

A determinisztikus véges automaták szemléletesen úgy képzelhetők el, mint olyan teljesen egyértelműen meghatározott működésű gépek, melyeknek csak véges sok belső és külső állapota van. A teljes meghatározottság azt jelenti, hogy a mindenkori jelen időhöz tartozó bemeneti és belső állapotok egyértelműen meghatározzák a jelen idejű kimeneti és a következő időponthoz tartozó belső állapotokat. Diszkrét időben képzeljük el a működésüket, még az olyan egyszerű kombinációs automaták esetén is, melyek kimeneti állapotát a belső állapottól függetlenül minden esetben egyértelműen meghatározza a bemeneti állapotuk. A kombinációs automatáknál bármely bemeneti állapothoz egyértelműen meghatározott a vele egyidejű kimeneti állapot. Nem minden véges automata ilyen egyszerű működésű. Az un. sorrendi automatáknál a belső állapottól függően egyforma bemeneti állapotok hatására különféle kimeneti állapotba kerülhet a véges automata. A sorrendi automaták többnyire visszacsatolást tartalmaznak, melyekre mutatok néhány példát.[i] A visszacsatolás és a belső állapotok jelentik a véges automaták elméletének eredetiségét, egyébként leírásukra elegendő volna az egyidejű kimeneti és bemeneti állapotok közötti függvénykapcsolat megadása. A kombinációs és sorrendi automaták között létezik egy közbenső típus, az „állandósult állapotban kombinációs automaták” családja. Az ilyen automatáknál meghatározott egy rövid véges idő, amely után minden esetben bármely bemeneti állapotra a belső állapottól függetlenül egyértelműen meghatározott az automata kimeneti állapota. Ezek működését tehát csak ezen megadott időtartamon belül átmenetileg befolyásolják az automaták lehetséges belső állapotai, egyébként a kombinációs automatákhoz hasonló a működésük.

A véges automaták fizikai modelljeit megvalósíthatjuk jól ismert számolótáblázatokkal a kibertérben. Ennek az első előnye az, hogy ezek a táblázatok – ellentétben pl. elektronikus áramkörökkel vagy mechanikus gépekkel – a szövegekhez hasonlóan sokszorosíthatóak és kommunikálhatóak. A második előnye, hogy a táblázatkezelő program magától felismeri és ki is jelzi, ha önmagára visszautaló – körkörös – hivatkozást talál. A harmadik előnye, összehasonlítva programozási nyelvek használatával, az átláthatóság és szemléletesség. Egy filozófiai problémának számolótáblázattal való ábrázolása példája annak, hogy a XXI. században mi számít közérthető magyarázatnak.

Igazságfüggvények és automaták

Azok a véges automaták, amelyek az elemi logikai függvényeknek felelnek meg mind kombinációs automaták. Többek között ilyenek az ÉS kapu, VAGY kapu valamint az Inverter – mint a tagadás megjelenítője. Vizsgáljuk meg részletesen az ÉS kaput. A mostani elemzés kis mértékben eltér attól amit a logikai tankönyvek a modern logika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatban megemlítenek. Erre a filozófiai vizsgálódás azon céljából van szükség, hogy kiemeljem ezen modellek *időben működő* mivoltát. Az ÉS kapu az alábbi módon írható le (0=hamis, 1=igaz). Legyen a belső állapotok halmaza A={a}, a bemeneteké X={00,01,10,11}, a kimeneteké Y={0,1} és δ (belső állapot) valamint λ (kimenet) az alábbi táblázatokkal megadott függvények. δ a belső állapotokat meghatározó táblázat.

δ	a
00	a
01	a
10	a
11	a

A baloldali oszlop a bemeneti állapotok halmaza, a legfelső sorban lévő „a” jel az egyetlen belső állapotot tartalmazza, az alatta lévő értékek a következő diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő belső állapotot mutatják. Ez az automata mindig egyazon belső állapotban van, ezért az automata működése megadható lenne belső állapotokra való hivatkozás nélkül is.

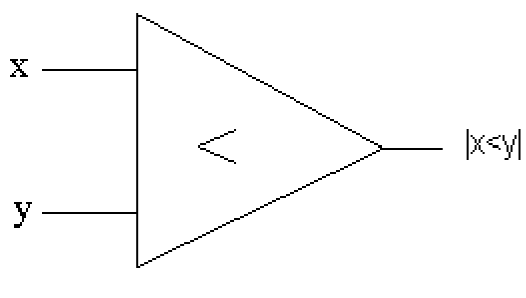
λ az ÉS kapu kimeneti értékeit meghatározó táblázat szintén egyszerű. Az első oszlop itt is a bemeneti állapotok halmaza, és a legfelső sorban csak egyetlen belső állapot van „a”, ezért a kimenet független a belső állapottól. A többi helyen lévő 0 vagy 1 érték a következő diszkrét időpontban (ütemben) létrejövő kimeneti állapotot mutatja.

λ	a
00	0
01	0
10	0
11	1

Mint a táblázatokból látható, ha az automata magas és alacsony szintű kimeneti állapotát rendre az ’igaz’ és ’hamis’ logikai értékeknek feleltetjük meg, akkor ezek a gépek fizikai modelljei egy logikai igazságfüggvénynek, az ÉS kapcsolatnak. Mivel a logikai tagadás és az ’és’ kapcsolat modellálható véges automatákkal, és minden igazságfüggvény kifejezhető ezzel a két logikai művelettel, ezért minden elemi logikai igazságfüggvény modellálható véges automatákkal. Ebből következik, hogy bármely állítás logikai szerkezetét az állításlogika szintjén kifejezi egy izomorf automata, ahol a bemenetek a formula atomi állításainak igazságértékei, a kimenet az összetett formula igazságértéke, és a magas és alacsony jelszintnek az ’igaz’ és ’hamis’ logikai értékek felelnek meg. A digitális áramkör időbeli működése modellálja az állítás atomi összetevőinek egy–egy értékelését. Egy időponthoz tartozó bemeneti állapot egy lehetséges értékelés, egy másik időponthoz tartozó másik bemenet egy másik lehetséges értékelés. Így egy logikai ellentmondást kifejező "~p & p" struktúrájú állításnak egy olyan áramkör (véges automata) a modellje, amelyik kimenete mindig alacsony szintű. Ezzel szemben egy logikai igazságot kifejező "~p V p" struktúrájú állításnak megfelelő automata kimeneti állapota mindig magas szintű. A 'kondicionális' nevű igazságfüggvénynek is megfeleltethető egy automata, ezért automatákkal a következmény reláció is vizsgálható. Bonyolult esetekben ez indokolt lehet annak ellenére, hogy a papíron ceruzával történő levezetés egyszerűbb.

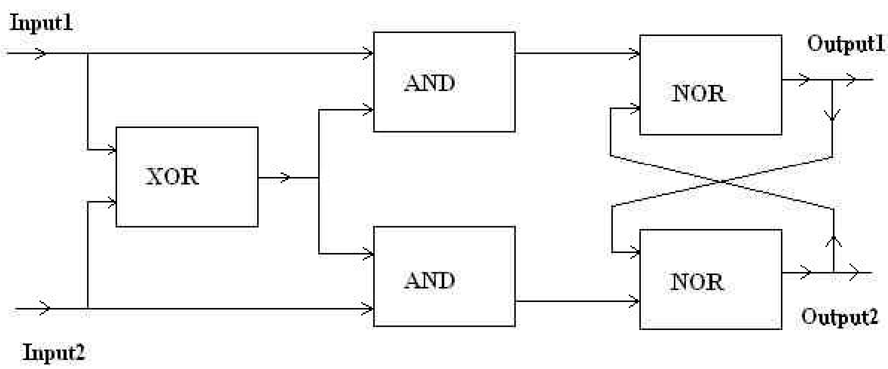
Szokásosan csak az igazságfüggvények elméletének szoktak megfeleltetni automatákat, de ez a megfeleltetés tovább is vihető. A funktorok – a hiányos nyelvi kifejezések – olyan automatának tekinthetőek, ahol a bemenetek állapotai az argumentumok értékei, míg a kimenet állapota a komplett kifejezés, melyet a funktor argumentumainak kitöltésével kapunk.[ii] Ettől eltér az az értelmezés, amikor a funktort modelláló automata kimenete nem a komplett kifejezés, hanem annak faktuális értéke. Ekkor az automata nem a funktort, hanem annak értékmenetét modellálja. Az 1. ábra egy olyan automatát ábrázol, amelyik kimenete ’igaz’ értékű, ha a bemenetei között fennáll egy reláció, ’hamis’ értékű más esetben. A kimenet=igaz ha az első bemenetre kisebb jel kerül mint a másodikra (input1<input2), és a kimenet=hamis más esetben. A bemenetek értékei számok a kimenetek értékei pedig az ’igaz’ és ’hamis’.

1. ábra



Nem minden kétállapotú véges automata tekinthető igazságfüggvények anyagi modelljének, ezzel foglalkozom a következőkben. Amit az egyszerű állításlogika képes kifejezni az állítások logikai struktúrájából azt a neki megfelelő anyagi modell – véges automata – is kifejezi úgy, hogy az atomi formulák 'igaz' és 'hamis' szemantikai értékelésének az automata bemeneti állapotai felelnek meg, a kimeneti állapot, pedig az összetett állítás igazságértékének. Kérdés, hogy meddig érvényes ez a megfelelés, ez a hasonlóság? Formulákat igazságfüggvényekkel összekapcsolva ismét formulát kapunk. Bár ezekhez a nem atomi formulákhoz is mindig van megfelelő kombinációs automata, utóbbiakkal nem ilyen egyszerű a helyzet. Egy kombinációs automatát egy másikkal összekapcsolva nem mindig kapunk kombinációs automatát. Vannak ugyanis olyan igazságfüggvény elemekből felépített automaták melyek működése nem igazságfüggvény – nem kombinációs automata – és kifejezhetetlen az állításlogika keretei között.[iii] Egy ilyen véges automata a következő[iv]:

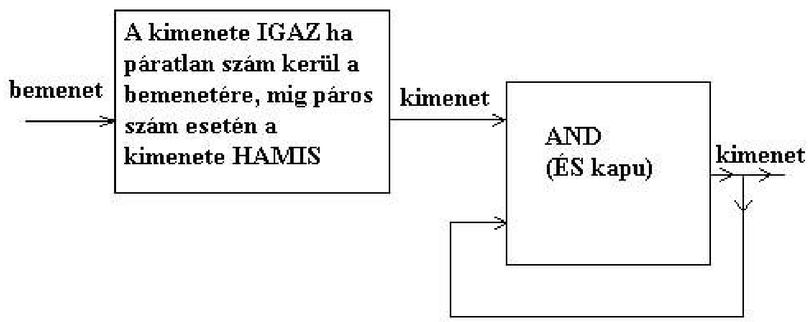
2. ábra



Hogyan működik? Az automatának van egy kezdeti belső állapota, legyen ez az első kimenet alacsony, a második magas jelszintje, állapota (Ouput1=0 és Output2=1). Az összes későbbi változás a bemenetekre (Input1 és Input2) érkező változások hatására következik be. A hatások irányát az ábrán látható nyilak mutatják. A változások diszkrét időben – ütemekben – történnek. Ha a következő ütemben a két bemenet azonos állapotú, vagy az Input1=1 és Input2=0, akkor nem történik semmi, a kimenet változatlan marad. Ellenben ha Input1=0 és Input2=1, akkor a következő ütemben a kimenet megváltozik az Output1=1 és Output2=0 állapotra. Ennek az automatának a bemenetektől függő egyértelműen meghatározott kimeneti állapota van amennyiben a két bemeneti állapot eltérő, viszont nincs egyértelműen a bemenetek által meghatározott kimeneti állapota, ha a két bemeneti állapot egyforma. Ilyenkor a korábbi kimeneti állapotot tartja meg, arra emlékezik. Az automata belső fölépítése egyszerű igazságfüggvények reprezentációjából áll: ÉS (AND), Kizáró vagy (XOR), és Vagy-nem (NOR) kapcsolat. Míg maga a három elemi igazságfüggvénynek megfelelő automata kombinációs struktúrájú, a belőle fölépített *visszacsatolást* tartalmazó automata nem az.

Egy másik véges automata a következő, melyekhez később nyelvi példát is adok:

3. ábra



Táblázatok vagy függvények megadását mellőzve a működése a következő. Az automata bemeneti állapotai páros vagy páratlan számok lehetnek.[v] Mindaddig, amíg páratlan számok kerülnek a bemenetére, addig a kimenete magas (1) szintű, ha viszont csak egyetlen egyszer is páros szám kerül a bemenetére, akkor a kimenete az ellenkezőjére vált (0), és úgy is marad az idők végezetéig.

Annak a pontos meghatározására, hogy mikor kapcsolhatók össze egymással szabályosan a véges automaták, mit jelent egy ilyen összekapcsolás során a visszacsatolás, továbbá, hogy mi az általános feltétele annak, hogy a kombinációs szerkezetű véges automatákból alkotott újabb automata maga is kombinációs struktúrájú legyen – vagy ha nem is kombinációs struktúrájú, de véges sok ütem után bármely megengedett bemeneti állapotra a belső állapottól függetlenül egyértelműen meghatározott kimeneti állapotot vegyen föl – nem térek ki. Ezek bonyolult matematikai apparátust igénylő kérdések, és mostani célunkhoz elegendő ha ezeket a fogalmakat intuitívan értelmezzük. A minket érdeklő kérdés az, hogy vannak-e olyan dolgok, jelenségek, megnyilatkozások vagy elméletek, amelyek logikai struktúráját a fizikai modell – véges automata, illetve egy digitális rendszer vagy számítógépen futó alkalmazás – ki tudja fejezni, miközben a klasszikus állításkalkulus nem? Miféle dolgoknak lehetnek a modelljei az ilyen sorrendi automaták?

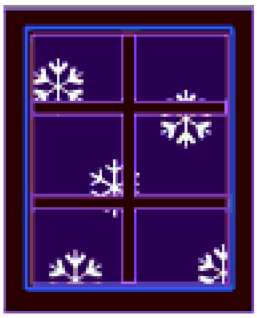
Nyelvi szintek

Ha meg akarjuk magyarázni egy elmélettel a hóesés és egy róla szóló leírás kapcsolatát, akkor valamiképp a hóesést is és a róla szóló leírást is meg kell jelenítsük a papíron, és meg kell adjuk a kettő közötti kapcsolatot is. A hóesést a papíron épp úgy mondatok fogják képviselni, mint a róla szóló beszámolót, bár a két fajta mondat más-más dimenzió polgára. Az első egy időben létező esemény képviselője a papíron, a második az magyarázatok és leírások időn kívüli világának a polgára. Ezt az ontológiai különbséget fejezi ki a Tarski által bevezetett tárgynyelv-metanyelv megkülönböztetés. Az a meghatározás, hogy:

Az 'Esik a hó.' mondat igaz pontosan akkor, ha esik a hó.

mint metanyelvi mondat mindazt modellálja a nyelv és valóság kapcsolatából, amire a nyelv a holt betűk segítségével képes a papíron a magyarázat és leírás dimenziójában. A baloldalon egy tárgynyelvi mondat neve, míg a jobboldalon annak metanyelvi szintű fordítása található. (Jelen esetben a fordítás megegyezik a tárgynyelvi mondattal.) Utóbbi képviseli a valóságot a magyarázat dimenziójában. A kettő közötti kapcsolat egy igazság függvény, amelyik azt mutatja, hogy ha nem esik a hó, akkor a mondat mem igaz, és fordítva. A mondat igazsága tehát egy esemény függvénye. Ábrázolhatjuk-e másképp az eseményt és a mondat tőle való függését? Mi a helyzet, ha a hóesést egy mozgó ábra képviseli egy elméletben? Lehet-e az "Esik a hó." mondat igazságának magyarázata az alábbi metanyelvi "mondat"? Mit állít ekkor a kép? A telet, a hóesést, a csukott ablakot vagy az ablakkeret geometriai formáját? (Interneten nézve hullanak is a hópelyhek: http://www.andrasek.hu/ferenc/it-is-snowing.htm)

Az „Esik a hó." mondat igaz pontosan akkor, ha



A hóesést attól függően, hogy papírt vagy elektronikus formátumot választunk közlendőnk megjelenítésére ábrázolhatjuk rajzzal, fényképpel, szimbolikus ábrával, esetleg mozgó animációval, de a leggyakoribb a természetes nyelv *használata* erre a célra. Amikor azonban számot akarunk adni a nyelv és az általa leírt valóság kapcsolatáról, akkor a világosság és pontosság igényének jobban megfelel egy olyan közeg, ahol matematikai jellegű kapcsolatot adhatunk meg a magyarázat dimenziójában megjelenő realitás és nyelv kapcsolatáról. Az általánosság igényének is jobban megfelel egy formális nyelv vagy modell használata. Ezért nem helyes az iménti ábrát tartalmazó mondat. A mondat egy logikai kapcsolatot kéne kifejezzen, ahol egy *említett* mondat egy *használt* mondat által kifejezett igazság-függvénytől függően beletartozik egy halmazba (igaz), vagy nem tartozik bele (hamis), csakhogy itt egy kép szerepel egy nyelvi kifejezés alkotórészeként, ami értelmetlenség. Azonnal nyilvánvalóvá válik mindez, ha megpróbáljuk fölolvasni, amit látunk. Amit mint látványt itt megértünk az a szó szoros értelmében kimondhatatlan. Lehetséges azonban más út is a hóesés megjelenítésére, a hóesést modellálhatjuk véges automatával, amit később mutatok be.

Tarski kimutatta, hogy egy olyan kellően erős nyelv amely megengedi saját mondatainak korlátlan megnevezését, és a nyelven belüli ’igaz’ kifejezés használatát és meghatározását a mondat nevek segítségével, ellentmondásra vezethet. Ez a veszély akkor is fenyeget, ha az ’igaz’ szó helyett olyan más szemantikai kifejezéseket használunk, mint a ’jelöl’. A kivezető út a nyelvek rendekbe sorolása, minek következtében ezek a veszélyes kifejezések egy nyelvre csak kívülről, egy annál bővebb nyelvben – metanyelven – határozhatók meg. Ezzel Tarski lényegében úgy döntött, hogy metanyelvi szinten – ahol rögzítjük az ’igaz’ szó jelentését – az igazság relációt fejez ki, azaz csak mindig egy adott nyelvre vonatkoztatható tulajdonság – egyargumentumú predikátum – gyanánt. Tehát a parttalan „x – igaz” tulajdonságot föl kell cseréljük az „x – igaz L nyelvben” relációval. Egy adott L_1 nyelvre vonatkoztatva természetesen megkapjuk a szokásos beszédmódot, amikor is az „x – igaz L_1 nyelvben” kifejezés (nyitott mondat) már tulajdonsága L_1 nyelv x nevű mondatainak. Ilyen kifejezéseket azonban L_1 nyelvben magában nem használhatunk, az „x – igaz L_1 nyelvben” kifejezés egy L_1 nyelvnél gazdagabb nyelv része, melyet a hagyományoknak megfelelően metanyelvnek nevezek. Tekintsük az alábbi meghatározást.

x L_1-igaz pontosan akkor, ha x L_1 egy mondatának a neve és $\psi(x)$

A jobb oldalon álló ’ψ(x)’ nyitott mondat az ’igaz’ terminus meghatározása L_2 metanyelvben, de az ’igaz’ terminus nem lehet alkotórésze ψ-nek. Tarski kimutatta, hogy némelyik nyelvre definiálható az igazság. Legyen az L_1 nyelvre vonatkozó igazság jele ’$igaz_1$’ és azt, hogy x L_1 nyelv egy mondatának a neve fejezzük úgy ki, hogy $x\square L_1$. Ekkor az erre a nyelvre vonatkozó igazság fogalma így határozható meg, ha egyáltalán meghatározható:[vi]

$$x\square igaz_1 \equiv_{df} x\square L_1 \text{ ÉS } \psi(x)$$

(Látható, hogy ez a formula nagyon hasonlít a ZF halmazelméletből ismeretes részhalmaz axiómához.)[vii] Tarski szerint a tartalmi adekvátság feltétele az, hogy ebből logikailag levezethető legyen L_1 nyelv bármely x nevű mondatára:

$$x\square igaz_1 \equiv \varphi(x)$$

Ahol „φ(x)” az x név által megnevezett mondat maga.

Tarskit a matematikai igazság érdekelte, nála a realitás a metanyelv szintjén jelentkezik mint a tárgynyelv metanyelvi fordítása. Engem viszont az időbeli létezők és az azt leíró időtől független igazságértékű mondatok kapcsolata érdekel, ezért a lényeget megtartva kissé eltérek Tarski felfogásától abban, hogy a tárgynyelv (L_1) csak véges sok kifejezést tartalmaz.

Vizsgáljuk meg alaposabban mindezt egy konkrét példán. Legyen $\mathbf{W_1}$ egy olyan véges világ amely egyetlen jellemzőt tartalmaz, a havazás intenzitását. Három különböző időjárás lehetséges $\mathbf{W_1}$ világban: ’havazik’, ’szállingózik a hó’, illetve hogy ’tiszta idő van’, azaz nem havazik de nem is szállingózik a hó. Másképpen mondva egyazon időpontban vagy havazik, vagy szállingózok a hó vagy tiszta idő van, de a egyszerre csak egy lehetséges. Formálisan ezt úgy kötjük ki, hogy egy függvény (egy jellemző) értékének tekintjük az időjárási állapotokat. A ’havazás’ meglehetősen bonyolult jelenség. Egy pontosabb elemzésben meg kéne különböztessünk további közbenső állapotokat, akár mérőskálát is használhatnánk a hóesés leírásához a hóesés intenzitásának értékeihez különféle számokat rendelve. Mostani célunknak azonban az a legegyszerűbb modell is megfelel amikor csak három állapotot használunk attól függően, hogy milyen a havazás intenzitása. $\mathbf{W_1}$ világ egyetlen helyből (vagy megnevezhető objektumból) áll, és ennek a jellemzője a hóesés. Ennek az egyetlen helynek a jele Δ. Végezetül $\mathbf{W_1}$ története mindössze négy diszkrét időpontban zajlik melyet az egyszerűség kedvéért az ’t_1,t_2,t_3,t_4’ alsó indexszel ellátott betűk ábrázolnak. $\mathbf{W_1}$ világ teljes története a következő: az első időpontban tiszta idő van, a következő két időpontban havazik, végül az utolsó, a negyedik időpontban ismét eláll a havazás és kitisztul az égbolt. Történetesen soha nem szemerkélt a hó, pedig ez is egy lehetséges időjárás $\mathbf{W_1}$ véges világban.

Hogy a feladatot a célnak megfelelően minél egyszerűbbé tegyem és ne foglalkozzam fölösleges technikai részletekkel, fölteszem, hogy az általam vizsgált nyelv (L_1) – a tárgynyelv – nem tartalmaz kvantifikációt, legfeljebb csak mint rövidítést, azaz nem több mint az állításlogika egyszerű nyelve. Egy ilyen nyelv alkalmas egy véges világ leírására. Mivel a mai fizika tanítása szerint a mi világunk épp ilyen, ezért ez a nyelv alkalmas a világ leírására. Az L_1–hez hasonló egyszerű véges univerzumon értelmezett logikai nyelvek a logikusok és matematikusok számára érdektelenek, de a filozófia céljaira elegendőek, sőt a legmegfelelőbbek. Lehetővé teszik, hogy az igazsággal kapcsolatos filozófiai problémákra, és ne technikai részletekre összpontosítsuk figyelmünket. A feladat ugyanis az ’igazság mint a tényeknek való megfelelés’ filozófiai eszméjének pontos megfogalmazása.[viii] Négy féle módon fogom bemutatni az igazság L_2 nyelven értelmezett fogalmát. Az első a klasszikus Tarksi féle vonalvezetést, a második Carnap szintaktikai irányultságát követi, a harmadik egy aritmetikai fordítást, a negyedik pedig véges automata, vagy más néven kibernetikai modellt alkalmaz.[ix]

1. Nevezzük L_1 nyelvnek azt az interpretált formális a nyelvet, amelyen leírjuk $\mathbf{W_1}$ véges világ eseményeit. L_1 nyelv – a tárgynyelv – három atomi kétargumentumú predikátum paramétert és öt individuum paramétert tartalmaz. Az atomi predikátumok individuum nevekkel való szabályos kitöltésével atomi mondatokat kapunk, melyekből a jól ismert logikai konnektívumokkal – ~, &, v, ≡ – képezhetünk összetett mondatokat. Vezessük be a következő jelöléseket: $H_2(x,y)$:= x helyen y-kor havazik; $H_1(x,y)$:= x helyen y-kor szállingózik a hó; $H_0(x,y)$:= x helyen y-kor tiszta az idő. Amennyiben az első argumentumban szereplő név nem helyet, vagy a második argumentumban szereplő név nem időpontot nevez meg, akkor az atomi formula igazság érték nélküli, azaz az általa kifejezett mondat értelmetlen. L_1 nyelvben az egyetlen helyet az ’n’, az egymást követő négy időpont pedig ’a,b,c,d’ betűk jelölik. Ezek

után L_1 összes atomi mondatainak halmaza a következő: $\{H_0(n,a), H_0(n,b), H_0(n,c), H_0(n,d), H_1(n,a), H_1(n,b), H_1(n,c), H_1(n,d), H_2(n,a), H_2(n,b), H_2(n,c), H_2(n,d)\}$[x]

L1 nyelv interpretációjával jelentést adunk a formális nyelv kifejezéseinek. A jelentés W_1 világ alkotórészeire – időpontokra, helyre, időjárási jellemzőkre – hivatkozik. W_1 világnak egyéb alkotórészei, pl. természeti törvényei és lehetnek, ezeket azonban nem tudjuk kifejezni a következő interpretációval. Az interpretációt - a nyelv paramétereinek deszignátumait - ρ függvény segítségével adjuk meg, amely L_1 nevei esetén a következő:

$\Delta=\rho(n)$, $t_1= \rho(a)$, $t_2= \rho(b)$, $t_3= \rho(c)$, $t_4= \rho(d)$

Semelyik két individuumnév nem azonos – azaz $n\neq a\neq b\neq c\neq d$ – mivel az általuk megnevezett entitások különböznek egymástól.

L_1 predikátumai interpretációjával W_1 történetét rögzítjük:

$\langle x,y\rangle\in\rho(H_0)$ pontosan akkor ha x helyen y-kor tiszta az idő.

$\langle x,y\rangle\in\rho(H_1)$ pontosan akkor ha x helyen y-kor szemerkél a hó.

$\langle x,y\rangle\in\rho(H2)$ pontosan akkor ha x helyen y-kor esik a hó.

Ezek alapján W1 világ történetének ismeretében az alábbi halmazokat kapjuk: $\{<\Delta,t_1>,<\Delta,t_4>\}=\rho(H_0)$; $\{\}=H_1$; $\{<\Delta,t_2>,<\Delta,t_3>\}=H_2$

A metanyelvi szinten – a papíron – L_0 nyelv jeleníti meg az eseményeket, folyamatokat, az időben létező valóság entitásait, L_1 tárgynyelv pedig leírja az eseményeket, folyamatokat, mely nyelv mondatainak igazsága vagy hamissága időtlen. L_1 atomi mondatai eseményekhez, folyamatokhoz való viszonyát a metanyelv szintjén írjuk le. Az eseményeket, folyamatokat megjelenítő metanyelvi részt L_0-nak nevezem, míg magát a metanyelvet L_2-nek. L_2-nek nyilván része L_0. Az alábbi táblázat mutatja, hogy egy egyszerű véges világ és a róla szóló beszámoló miként ábrázolható nyelvi szintek segítségével:

<table>
<tr><td>L_1 nyelven – tárgynyelvi szinten – állításokat fogalmazunk meg W_1 világról, és egy függvény megadja a nyelv paramétereinek interpretációját, azaz a paraméterek faktuális értékét.</td><td>Metanyelvi szinten L_0 nyelven jelenítjük meg W_1 világot és annak történetét. Ezt a nyelv is lehet formális. L_0 része L_2 meta nyelvnek.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metanyelvi szinten (L2 nyelv) kapcsolatokat (relációkat) adunk meg L_1 kifejezéseinek metanyelvi neveire vonatkozó szemantikai predikátumok és L_0 kifejezései között, és ennek segítségével meghatározzuk az igazság L_1-re vonatkozó fogalmát.</td></tr>
</table>

L_1 nyelv véges, azaz nem tartalmaz valódi kvantifikációt, ezért igazságszabálya az interpretáció által meghatározott. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy L_1 valamennyi molekuláris mondata kizárólag negációt és konjunkciót tartalmaz. Ekkor L_1 valamely x nevű mondata igaz$_1$ akkor és csak akkor, ha:

(a) x az L_1 nyelv egy atomi mondata, tehát R(x,y) alakú, ahol x értéke Δ, y értéke t_1,t_2,t_3 vagy t_4, és x deszignátuma az R deszignátuma szerinti relációban áll y deszignátumával;

(b) x L_1 nyelv egy atomi mondata negációja és az atomi mondat nem igaz L_1-ben;

(c) x egy konjunkciót tartalmazó molekuláris mondat, ahol a konjunkció mindkét tagja igaz L_1-ben.

2. A második megoldás hasonlít Rudolf Carnap állapotleírás elméletéhez.

Mivel L_1 nyelv atomi mondatainak száma véges, ezek metanyelvi fordításai száma is véges, melyek halmazát jelölje A_1. A fordítás L_0 nyelven történik, amely nyelv tulajdonképpen az igazságfeltételek nyelve. Most is feltesszük, hogy a név paraméterek közül semelyik kettő nem azonos. A tárgynyelv változóit annak dőlt betűs tipográfiai megjelenítése képviseli a metanyelvben, az azonosság jelet pedig a $\doteq$ jel. Két elemi logikai konnektívum (nem, és) megfelelői rendre a kivonás, szorzás, melyekkel az összes többi igazságfüggvény kifejezhető.

L_1 tárgynyelv kifejezései	A metanyelvi fordítás - L_0 - kifejezései
n	Δ
a	t_1
b	t_2
c	t_3
d	t_4
x=y	$x \doteq y$
H_0(x,y)	$0 \doteq j(x,y)$
H_1(x,y)	$1 \doteq j(x,y)$
H_2(x,y)	$2 \doteq j(x,y)$
~	-
&	*

A_1 halmaz elemi a következő atomi mondatok:

$\{0 \doteq j(\Delta,t_1), 0 \doteq j(\Delta,t_2), 0 \doteq j(\Delta,t_3), 0 \doteq j(\Delta,t_4), 1 \doteq j(\Delta,t_1), \ldots\}$

Carnap kutatásai alapján megadhatjuk az elemi tények leírásának szintén véges halmazát, melyet G_1 jelöl. A_1 minden atomi mondata vagy a tagadása – de csak az egyik – eleme G_1–nek, és semmi más nem eleme G_1–nek. Ha tehát pl. „$0 \doteq j(\Delta,t_1)$" eleme A_1-nak akkor vagy „$0 \doteq j(\Delta,t_1$" vagy „$-0 \doteq j(\Delta,t_1$" eleme G_1-nek. Nyilvánvaló, hogy G_1 része L_0 nyelvnek. Legyen egy L_1 beli formula neve x – azaz $\Phi=\varphi(x)$, ahol Φ egy atomi vagy összetett formulája L_1 nyelvnek, φ pedig a formulák neveihez a formulákat magukat rendelő függvény – és ekkor a $\psi(x)$ feltétel így is megadható: Φ szintaktikailag levezethető G_1 – ből. (Bonyolultabb nyelvek esetén ez nem lenne elfogadható, mert az axiómákból való levezethetőség nem meríti ki az igazság fogalmát.) Mivel L_1 nulladrendű nyelv, ezért igaz, hogy benne minden állítás elemi tényállítások igazságfüggvénye, és megadható olyan kalkulus, amellyel az igazak le is vezethetők tetszőleges G_1-ből (a 0-rendű elméletek negációteljesek)[xi]. Ebben a megközelítésben – metanyelvi szinten L_0 nyelven – megfogalmazhatunk W_1 világra vonatkozó természeti törvényeket is. Pl. így: „Ha előző nap szállingózik a hó, akkor másnap hóesés lesz.” vagy így: „Három egymást követő nap soha nem szállingózik a hó.” Figyeljük meg, hogy ezeket csak akkor állíthatjuk igaz állításként L_1 nyelven, ha fölvesszük W_1 világ tulajdonságai közé, azaz megfogalmazzuk L_0 nyelven mint axiómát. Szimpatikus megközelítése az igazság fogalmának, a következőkben azonban némelyik esetben más utat fogok követni.

3. A harmadik megközelítés L_1 nyelv igazság fogalmát aritmetikai tulajdonsággá transzformálja. Formális nyelven most is négy elemi formulával írjuk le W_1 történetét. Legyen ’Δ’ az egyedüli térrész jele, az ’t_1,t_2,t_3,t_4’ jelek pedig e kicsi véges világ egymást követő időpontjai, és ’j’ egy kétargumentumú függvény amely egy dolog és egy időpont összefüggésében azt az állapotot adja meg, hogy azon a helyen milyen az időjárás. Bevezetve a korábbi rövidítést, hogy 0=tiszta az idő, 2=havazik, W_1 történetét ábrázoló négy elemi esemény L_0 nyelven így fest: $\{0=j(t_1,\Delta),\ 2=j(t_2,\Delta),\ 2=j(t_3,\Delta),\ 0=j(t_4,\Delta)\}$. L_1 nyelv öt individuumnevet (n,a,b,c,d), három kétargumentumú predikátumot (H_0,H_1,H_2), és a jólismert logikai konnektívumokat tartalmazza. A predikátum első argumentumába csak n, míg a második argumentumába csak ’a,b,c,d’ jel kerülhet. A szokásos logikai konnektivumok segítségével képezhetünk L_1 atomi mondataiból molekuláris mondatokat. Az atomi mondatok száma most is véges, de L_1 összes lehetséges kifejezéseinek száma végtelen. A két nyelv – L_0 és L_1 – közötti kapcsolatot a metanyelven – L_2-n – fogalmazzuk meg. L_2 gazdagabb mindkettőnél, már atomi mondatainak a száma sem véges. Jelen esetben L_2 metanyelv a magyar nyelv egy töredéke formális szimbólumokkal kiegészítve.

Legyen adott L_1 nyelv mondatainak az aritmetikai fordítása a következők szerint. A fordítás L_1 minden mondatához egy egész számot rendel. Legyen Z az egész számok halmaza, A_1 pedig L_1 atomi mondatai halmaza. Legyen f egy A_1 értelmezési tartományú és Z értékkészletű olyan függvény melyre három feltétel teljesül:

A1. f L_1 minden atomi mondatához egy egész számot rendel, de különböző atomi mondatokhoz különböző számokat rendel;

A2. ha p atomi mondathoz x szám, a q atomi mondathoz y szám tartozik, és p-nek tagadása (negációja) q, akkor fennáll a következő egyenlőség: x=-y-1.

A3. a H_0(x,y) atomi mondathoz rendelt szám kettőnél nagyobb prím szám akkor és csak akkor ha $0 \overset{\perp}{=} j(x,y)$; ÉS a H_1(x,y) atomi mondathoz rendelt szám kettőnél nagyobb prím szám akkor és csak akkor ha $1 \overset{\perp}{=} j(x,y)$; ÉS a H_2(x,y) atomi mondathoz rendelt szám kettőnél nagyobb prím szám akkor és csak akkor ha $2 \overset{\perp}{=} j(x,y)$.

Az igazságfüggvényeknek aritmetikai műveleteket feleltetek meg, és az ennek megfelelően lefordított formulák értékelésekor egész számokat kapunk. Az igazságfüggvények aritmetikai fordításakor csak néhány elemi aritmetikai műveletet használok: összeadás, kivonás, szorzás és a „modulo" függvényt. Ha egy egész szám kettővel való osztási maradéka nulla, akkor a szám moduló értéke páros, míg minden más esetben a moduló értéke páratlan. Tehát a 'mod(p,2)' kifejezés p szám kettővel való osztási maradékát jelöli. Az 'p' változó helyén összetett kifejezés is állhat pl: -1*p-1 Az alábbi táblázat mutatja az igazságfüggvényeket egy sorban a nekik megfelelő aritmetikai kifejezéssel.

Igazságfüggvény, az argumentumok kitöltve	magyarázat	Az igazságérték aritmetikai megfelelője, ahol p és q értékei egész számok lehetnek.
~p	negáció	mod(-1*p – 1, 2)
p & q	ÉS kapcsolat	mod(p*q, 2)
p v q	alternáció (megengedő értelmű vagy)	mod(1+(p+1)*(q+1), 2)

Korábban rögzítettük, hogy W_1 világban az első ütemben jó idő van, majd a következő két ütemben havazik, míg az utolsó időpontban eláll a havazás. Ennek megfelelően egy f függvény – L_1 atomi mondatai egy interpretációja és értékelése – az alábbi:

Formula	Értékelés	Jelentés
H(t1,0)	11	Tiszta az idő t1-kor.
H(t1,1)	-14	Nem szállingózik a hó t1-kor.
H(t1,2)	-16	Nem havazik t1-kor.
H(t2,0)	-18	Nem tiszta az idő t2-kor
H(t2,1)	-20	Nem szállingózik a hó t2-kor.
H(t2,2)	21	Havazik t2-kor
H(t3,0)	-24	Nem tiszta az idő t3-kor.
H(t3,1)	-26	Nem szállingózik a hó t3-kor.
H(t3,2)	27	Havazik t3-kor.
H(t4,0)	29	Tiszta az idő t4-kor
H(t4,1)	-32	Nem szállingózik a hó t4-kor.
H(t4,2)	-34	Nem havazik t4-kor.

Az aritmetikai fordítás L_1 bármely összetett mondatához meghatároz egy egész számot. Ez alapján az igazság definíciója L_1-ben a következő:

L_1 bármely *s* mondata igaz pontosan akkor, ha az *s*-hez tartozó szám páratlan. L_1 nyelv igazságfogalmának negyedik értelmezésével a következő részben foglalkozom.

Az igazság elektronikus modellje[xii]

Most rátérek vizsgálódásom fő céljára, hogy miképp modellálhatóak L_1 mondatai, az azok igazságát meghatározó világ, valamint a kettő közötti kapcsolat, véges automatákkal? Hogyan fogalmazható meg Tarski szemantikai zártságot tiltó követelménye az automata modellek világában? Miképp jelenik meg ebben a modellben egy szemantikailag zárt nyelv lehetősége? Igazolhatja-e az elektronikus modell, hogy egy szemantikailag körbenforgó gondolatot gyakran igen, de nem minden esetben kell elvetni? Ennek az automata modellnek meg kell jeleníteni időbeli eseményeket és az azokat leíró igaz mondatok időtlen – azaz időben állandó – igazságértékét. Ha jó a modell, akkor attól függően, hogy miként fest a valóságot reprezentáló modell, mi történik benne és mi nem, más és más L_1 – beli atomi mondatok lesznek igazak. Ez elektronikus modellben a mondatokat automaták képviselik. A mondatokat képviselő automaták bemenetei állapota (jele) lesz a mondatok egy interpretációja, így összes lehetséges bemeneti állapotok halmazat pedig képviseli az összes lehetséges interpretációk halmazát. Az egyes interpretációknak megfelelő mondatok igazságértékeit az automaták megfelelő kimeneti állapotai képviselik. Az összes lehetséges kimeneti állapotok halmaza tehát a mondatok összes lehetséges igazságértékeinek halmazát képviseli. Ha egyetlen mondatot vizsgálunk, akkor a kimeneti állapotok halmaza egyelemű sorozatok halmaza, ha több mondatnak az interpretációkhoz tartozó igazságértékét, akkor a kimeneti állapotok halmaza többelemű sorozatok halmaza. A többelemű sorozat tagjai rendre a mondatok igazságétékei. A nyelvi szinteket figyelembe vége, az automaták bemenetei állapotait (jeleit) a mondatok igazságfeltételei határozzák meg. Minden egyes igazságfeltételhez tartozik egy és csak egy bemeneti állapota az automatának, de az már korántsem biztos, hogy a mondatok igazság feltételeihez tartozó egyértelmű bemeneti állapotokhoz egyértelmű kimeneti állapotok is tartoznak. Az igazság feltételeket képviselő automaták modellálják a tárgynyelv metanyelvi szintű fordítását, az én felfogásomban a metanyelven megfogalmazott igazság feltételeket. A tárnyelvi mondatok nevei az igazságfeltételektől függően beletartoznak az 'igaz' vagy 'hamis' metanyelvi predikátumok terjedelmébe. Ez az összefüggés úgy jelenik meg az automaták világában, hogy a tárgyelvi mondat igazságértékét képviselő automata kimeneti állapota meghatározott értékű az igazságfeltételektől függően. Az automatáknak két diszjunkt halmazára van tehát szükségünk: az egyik halmazba az igazságfeltételeket szimuláló automaták, a másik halmazba a mondatokat szimuláló automaták tartoznak. Az utóbbiak bemenetei az előbbiek kimenetei. Az igaz vagy hamis mondatokat képviselő automata modellek nem lehetnek bemenet nélküli automaták, mivel igazságértékük függ valamitől. Ezzel szemben a valóságot, az igazságfeltételeket képviselő automaták lehetnek bemenet nélküli, csak kimenettel rendelkező automaták (generátorok), mutatván azt, hogy a valóság mint egész önálló létező. Ontológiai felfogásunktól függ, hogy a valóság milyen kategóriákba tartozó létezőket tartalmaz. A mi hóeséssel kapcsolatos példánk esetén a hóesést képviselő modell mutatja az modellel alkalmazott ontológiai elkötelezettségünket. A modell tartalmaz időpontokat, időjárási jellemzőket, egy helyet, és időjárási eseményeket. Ezt a véges világot egy véges automata képviseli, melynek kimeneti állapotai a véges világ történései. E véges világról szóló mondatokat szintén automaták képviselik. Ezek kimeneti állapotai – a mondatok igazságértékei – a véges világ történéseitől függenek. Jelen esetben egy generátor magas jelszintje azt ábrázolja, hogy esik a hó, közepes jelszintje a szállingózó hóesést, alacsony szintje pedig azt, hogy nem havazik. Az, hogy az automata működése semmi mástól nem függ – nincs bemenete – azt fejezi, hogy ő maga az amitől függnek a dolgok, mivel ő modellálja ama tényt, hogy esik a hó. A leírás és realitás kapcsolatának filozófiai relációját most véges automaták kapcsolatával ábrázoltuk. Ez a megközelítési lehetőség azonban bizonyos értelemben csalóka. Csak akkor jelenik meg a maga valóságában, ha ezen magyarázat a kibernetikai tér világában is rendelkezésre áll, mint elektronikus dokumentum. Ugyanis csak az utóbbi képes eseményeket, történéseket, azaz az időt bemutatni, és nem csupán leírni. Egy elektronikus dokumentum megjeleníthet változásokat, míg egy papír alapú dokumentum nem. Az elektronikus dokumentum így bemutathatja a leírás és realitás kapcsolatának vetületét az idő (a mindennapi lét) dimenziójában, míg papír alapú statikus betűk világa erre nem képes, csak ugyanennek a leírás dimenziójában való vetületét ábrázolja. Ezért a mostani fejtegetés adekvát létmódja az elektronikus formátum és nem a nyomtatott szöveg. A papíron a véges automaták ugyanis nem mint időben működő dolgok, hanem csak mint ábrák vagy mint függvények és formulák jelentkeznek. A matematikai igazság vizsgálatakor ennek nincs jelentősége, mivel azok a tények, melyektől a matematikai igazság függ maguk is időtlen létezők, ezért adekvát létmódjuk a nyomtatott szöveg. Az események ábrázolásának viszont az adekvát létmódja a kibertér.

Tarski útmutatásának megfelelően a tényeket képviselő automatákat külön kell választani a róluk szóló állításokat reprezentáló automatáktól. Az utóbbiak igazságértékei függvényei az előbbiek kimeneti állapotának. (Mindez a tarski.xls elektronikus dokumentum használatával tanulmányozható.) A modellben a különböző nyelvi szinteket egy számolótáblázat egyes munkalapjai (worksheet) különböztetik meg. Ekkor az igazságfeltételek metanyelvi szintje (L_0) befolyásolhatja a tárgynyelvi szintnek megfelelő munkalap formuláinak értékét (kimenetét), de visszafelé nem megengedett a kapcsolat. A tárgynyelvi szintnek megfelelő munkalapon lévő formulák értékei (kimenetei) nem hathatnak vissza a metanyelvi szintre, az igazságfeltételek bemeneti állapotaira. Ennek a szabálynak a megsértése paradoxonokhoz vezethet, mint azt az elektronikus modell további része be is mutatja. Az egyes logikai függvényeknek a számolótáblázat cellái közötti kapcsolatok felelnek meg. A függvények argumentuma a számolótáblázat bementi értéke, míg a függvény értéke a kimenet, azaz a számítás eredménye. A modell könnyedén lehetővé teszi, hogy W_1 világ történetét különbözőképpen módosítva megfigyeljük, miképp változik ettől függően L_1 nyelv atomi mondatainak igazságértéke. Figyeljünk föl arra, hogy miközben a W_1 világában történnek események, a róla szóló magyarázatok és leírások világában az igazságérték változatlan, állandó. Ebben a példában a leírások világának modellje kombinációs struktúra. Kérdés azonban, hogy csak és kizárólag kombinációs automaták lehetnek-e a helyes magyarázatok és leírások, a korrekt elméletek modelljei?

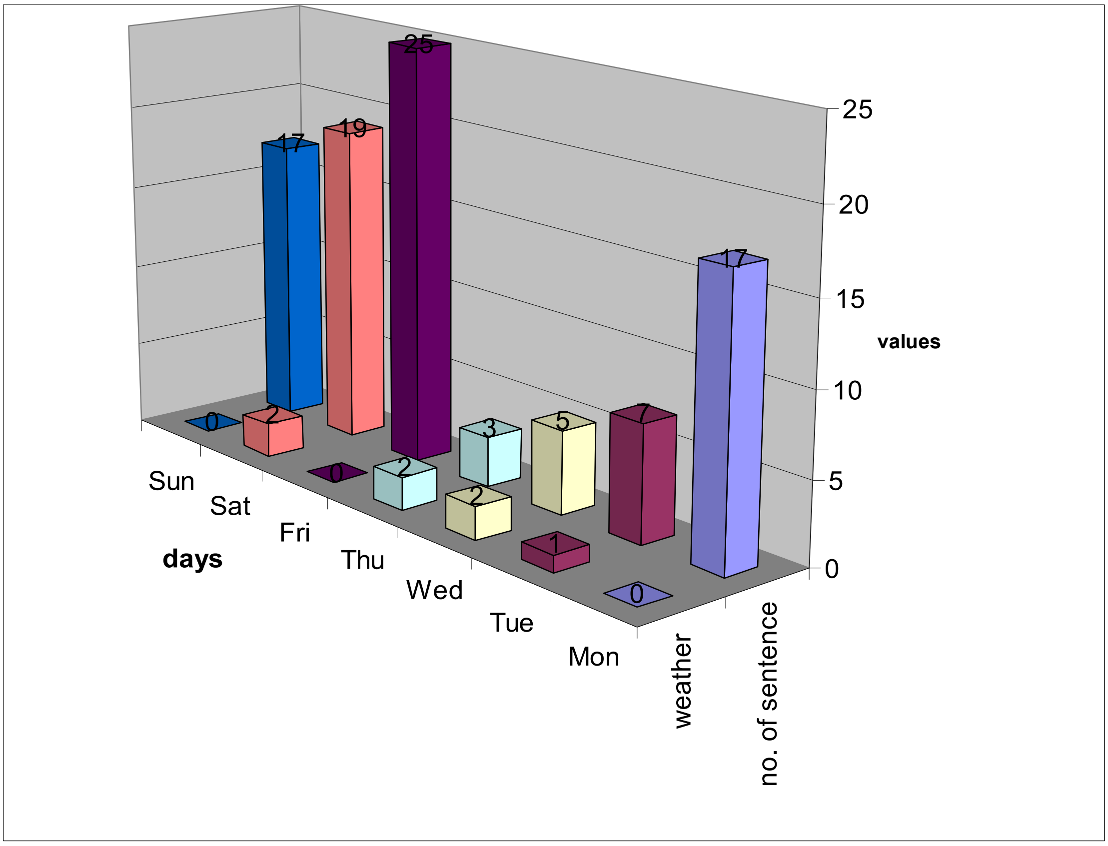
Mostani vizsgálódásunk keretei között egyszerű logikai struktúrájú nyelveket használunk. Ezek formalizálhatók az elemi – kvantifikáció nélküli – logika eszköztárával. Az ebben előforduló atomi formulákat igazságfunktorok kötik össze, és az összes igazságfunktor modellálható olyan véges automatákkal, melyeket kombinációs automatáknak neveztem. Ebből következik, hogy ezen szűk határok között megfogalmazható összes L_1 nyelvet használó elmélet és magyarázat is modellálható kombinációs automatákkal. Ezen kívül elfogadható-e bizonyos feltételekkel egy igazságérték körbenforgást tartalmazó elmélet? Ha igen, annak nem kombinációs automata lesz a modellje, hanem sorrendi hálózat. Ésszerű kikötés, hogy az automata legyen ciklikus, és bármely bemeneti állapota egyértelműen határozza meg a kimenet állandósult állapotát. Tegyük fel ugyanis ellenkezőleg, hogy van egy elméletünk melynek modellje egy sorrendi automata. Ez azt jelenti, hogy az elmélet igazságfeltételei nem kombinációs struktúra alapján függnek azoktól a tényektől, amiről az elmélet szól. Ebből az következi, hogy amitől az elmélet tárgyán kívül függ, az a modell, az automata belső állapota. Csakhogy egy elmélet esetén nem kézenfekvő, hogy mit jelenthet a belső állapot? Tárgyak esetén jelentheti a tárgy korábbi történetének lenyomatát, de van-e ennek értelme egy elmélet esetén? Elfogadva azt az automata elméleti föltevést, hogy minden sorrendi automata fölépíthető elemi kombinációs automaták visszacsatolt rendszereként, ha van jelentése az automata modell belső állapotának egy elmélet vonatkozásában, akkor az elmélet igazsága nem csak az elmélet tárgyától, hanem az elmélettől önmagától is függ. Elfogadható-e egy ilyen önigazoló elmélet? Legfeljebb akkor, ha az önigazoló jelleg nem játszik lényeges szerepet, bármennyire is homályos, hogy mi jelent itt a „lényeges szerep". Ha azt jelenti, hogy az elmélet immunis a külső hatásokra, és némelyik esetben nem ad meg egyértelmű igazságértéket, akkor az az elmélet elfogadhatatlan. Az, hogy nem ad meg egyértelmű igazságértéket az automata modellben úgy jelenik meg, hogy kimenetének állapota (az elmélet igazságértéke) nem konstans függvény az időben. A nem lényeges szerep azt jelenti, hogy egy elmélet „végső soron" a tényektől függ, önmaga feltételezett igazságától csak átmenetileg. Az automaták nyelvén ez úgy jelenik meg, hogy az elméletnek megfelelő kétállapotú automata kimeneti állapota hosszú távon csak a bemeneti állapotoktól függ, és nem függ az automata belső állapotától. A modell megerősíti azt a filozófiai sejtést, hogy az igazság mindig valami rajta kívül állónak a függvénye, végső soron sohasem függhet önmagától.

Talányos mondatok

Egy szófukar király, aki mindössze egy hétig uralkodott, és a hét minden napján csak egyszer egyetlen mondat erejéig szólalt meg, az ötödik napon a következőt mondta:

A király mindig igazat mond.[xiii]

A kérdés az, hogy igazat mondott-e vagy hamisat ezzel a mondattal? (A mondat modellje a king.xls táblázat munkalapjain található.) Tegyük fel, hogy pontosan ismerjük e-király történetét, és így azt is tudjuk mikor mit mondott. A király néha az időjárásról beszélt, arról, hogy milyen idő van most, vagy milyen lesz holnap. Mivel sem a jelent sem a jövőt illetően nem tévedett, úgy vélte mindig igazat mond. A saját tévedhetetlenségét állító mondat is tartalmaz jövőre való utalást, mivel a király később is megszólalt. Különös módon az hogy megszólalt, és egy mondatot mondott, az időjáráshoz hasonlatosan része az ő világa tényeinek. A mondat különössége abban az összefüggésben rejlik, hogy a király világa eseményeinek része egy mondat kimondása, sőt azon felül még a kimondott mondat igazságértéke is, akár van a mondatnak igazságértéke, akár nincs. Hiszen nyilván nem minden mondatnak van igazságértéke. Nincs igazságértéke az utasításoknak, vagy parancsoknak, melyek az utasítás címzettje által végrehajthatóak vagy sem. Nem tudom végrehajtani azt az utasítást, hogy emeljek föl egy sziklát, de végre tudom hajtani, hogy egy falapba kalapáljak különböző színű szögeket, és a kék fejű szögeket egy zsineggel összekössem a piros fejű szögekkel. Azt is végre tudom hajtani, hogy a zöld fejű szögeket kössem össze mindazokkal a szögekkel, melyek feje fehér is és fekete is. Mivel ilyen szögek nincsenek, a feladat végrehajtható, melynek eredményeképpen nem kerülnek új zsinegek a szögekre. Viszont zavarba jövök, ha azt a feladatot kapom, hogy az egyik újonnan bevert szöget kössem össze mindazon szögekkel, melyek nincsenek összekötve semelyik szöggel, vagy fordítva, kössem össze mindazon szögekkel, melyek össze vannak kötve önmagukkal. Hasonló gondot okoznak a király mondatai is. A kérdés a király mondataival kapcsolatban az, hogy azok olyan mondatok-e melyek igazak vagy hamisak lehetnek. Ez a kérdés a király ötödik napon mondott mondatával kapcsolatban vet föl talányokat. Nem egyértelmű miképp értette a király a mondatot. Ha a mondat csak a kimondása előtt és az után elhangzott más mondatokra vonatkozik, akkor igazsága nem tartalmaz körbenforgást, és egyértelmű függvénye az eseményeknek. Amennyiben ettől eltérően a mondat önmagára is vonatkozik, akkor sajnálatos módon két választásunk van. Ha a király minden más mondata igaz volt, akkor ezt a mondatot is igaznak tekinthetjük. Vélekedhetünk azonban úgy is, hogy bármit is mondott a király más alkalmakkor, ez a mondata hamis, mert megsért bizonyos logikai elveket. Mivel megsért bizonyos logikai normákat, ezért nem tartozik azon mondatok körébe melyek igazak vagy hamisak lehetnek. Ha ebben igazunk van, akkor legalább egyszer nem igazat mondott a király, és így ez a tény önmagát is alátámasztja. Az hogy nem-igazat mondott, nem ekvivalens azzal hogy hamisat mondott, mivel ez az ekvivalencia csak a mondatok speciális halmazán belül érvényes. Az elektronikus modell vázlatát a korábbi 3. ábra, a további részleteket az elektronikus számolótáblázat king0 és king1 munkalapja ábrázolja. Az időjárási eseményeknek számokat feleltettem meg, és így ez könnyen ábrázolható grafikonnal. Azért, hogy a király megnyilatkozásait is hasonlóképpen ábrázolni tudjam, fölhasználtam az igazságfüggvények korábban bemutatott aritmetikai transzformációját. A király mondatai számokkal azonosíthatóak, és a számok páros vagy páratlan mivolta azt is megmutatja, hogy a király igazat mondott-e vagy hamisat.



Ilyen módon egyazon ábrán látjuk az időjárási eseményeket és a király megnyilatkozásait. Figyeljük meg ezt működés közben a gyakorlatban! Attól függően, hogy valamely napon havazott vagy sem, és a király a valóságnak megfelelően nyilatkozott erről vagy sem, a király mondatához tartozó szám megváltozik. Ha pl. hétfőn napsütés volt és a király azt mondta hogy jó idő volt hétfőn, a király mondatának a száma 17 lesz, ha ettől eltérően hétfőn havazott vagy szállingózott a hó, mondatának értéke -18 lesz. Ez a kapcsolat, a mondat igazságfeltételei és a mondat logikai értéke között állandó, időben konstans. Nem így áll a dolog a király pénteken mondott mondata igazságértékével. A modell szerint, ha csak egyszer is hamisat mondott a király a hétfői időjárásról, akkor a pénteki mondata hamissá válik, és úgy is marad. Hiába változtatjuk meg a világ lehetséges történetét úgy, hogy a király hétfői mondata mégis igaz legyen, a pénteki mondatára ez többé nincs befolyással. Az ennek megfelelő korábbi 3. ábrán látható véges automata nem ciklikus működésű, irreverzibilis állapotba kerül ha a király hamisat mond. Ha ugyanis az automata kimenete 'hamis' értékűvé válik a bemenet valamely értékelésére, akkor ez az állapot visszacsatolva egy ÉS kapu bemenetére, végérvényesen ’hamis’ értékre kapcsolja az ÉS kapu kimenetét, mivel az és kapcsolat értéke hamis, ha bármelyik összetevője hamis.

Amiképp a hazug formalizált megfogalmazásai egyfajta értelmezését adják a természetes nyelven megfogalmazott talányos értelmű mondatnak, akképpen a ’hazug’ paradoxon különféle megfogalmazásainak különféle automata modellek feleltethetőek meg attól függően, hogy miként értelmezzük az logikai-filozófiai összefüggéseket. Használhatnánk erre a célra az igazságfüggvények aritmetikai transzformációját is. A legegyszerűbb esetben a hazug egy olyan inverternek felel meg, amelyik kimenetét visszacsatolták a bemenetére, és az váltakozva alacsony majd magas szintű annak megfelelően, ahogy a ’hazug’ egyes igazság értékeléseiből mindig annak ellenkezőjére következtetünk.[xiv] A mostani megoldásnak is ez volt a kiinduló pontja. Közös a következő modellekben, hogy az automata kimeneti állapota, ami a mondatok feltételezett igazságértékének felel meg, visszahat az automata bemeneti állapotára, azaz a paradox mondat igazságfeltételei között megjelenik a mondat vélt igazságértéke. Lássuk ezeket a következő két példán.

1 – a „hazug”.[xv] Ennek modellje a liar.xls táblázat munkalapjain található. Az L2 munkalap C2 cellájában egy mondat található, a C2 cellára hivatkozva egy mondat faktuális értékére hivatkozunk. A mondat értéke L2 munkalap F2 vagy F3 cella tartalma, attól függően, hogy a mondat igaz vagy hamis. Az érték a ’hamis’, ha az L0 táblázat C2 cella értéke az ’igaz’, és fordítva: a mondat értéke az ’igaz’, ha az L0 munkalap C2 cella tartalma a ’hamis’ érték. Az L0 munkalap a tényeket, L2 munkalap a róla szóló igaz vagy hamis mondatokat ábrázolja. Az a tény, hogy az L0 munkalap C2 cellájának mi az értéke, nem más, mint egy mondat faktuális értéke. Ez az érték az L2 munkalap C2 cellája értékének visszacsatolásával kerül a tények tartományába, nevezetesen az L0 munkalap C2 cellájába, azon tények közé, melyek meghatározzák a mondat igazságértékét. A mondat igazságértéke alapesetben vagy az ’igaz’ vagy a ’hamis’, mert ezek az értékek találhatóak a F2 és F3 cellákban. A visszacsatolást megszüntethetjük, amennyiben L0 munkalap C2 cellájába konstans értéket írunk. Milyen értéket írhatunk ebbe a cellába? Csak az ’igaz’ és ’hamis’ logikai értékek egyikét, mert az L2 táblázat C2 cellájában egy igazságfüggvény szerepel, amelyik csak a logikai értékek halmazán értelmezett. Ha más értéket írunk ide, a mondat értelmetlenné válik, amit a modell ki is jelez. Ha az ’igaz’ értéket írjuk az L0 C2 cella tartalmába az L2 C2 mondat értéke a

’hamis’, és fordítva, ha a ’hamis’ értéket írjuk az L0 C2 cella tartalmába, akkor az L2 C2 mondat értéke az ’igaz’ lesz. Addig lesz ez a két érték a mondat két lehetséges faktuális értéke, amíg az ’igaz’ és a ’hamis’ szerepelnek az L2 F2 és F3 cellák tartalmában. Mindebből az következik, hogy az L2 C2 mondat a logikai tagadása L0 C2 cella tartalmának. Hogy valóban a logikai tagadása, azt úgy ellenőrizhetjük, hogy a L0 C2 cellába a hamis=igaz, illetve az igaz=igaz mondatokat írva ellenőrizzük a mondatok tagadásának igazságértékét L2 C2 cella tartalmát megfigyelve. A hazug is egy mondat tagadása, de ez a mondat éppen önmaga faktuális értékének a tagadása. Mindez az igazságfüggvények klasszikus apparátusával megfogalmazhatatlan, a hazug nyilvánvalóan nem azt mondja, hogy p≡non-p, mert ennek egyértelmű igazságértéke volna. A hazug egyfajta önreferenciát, az igazságértékek olyan önmagától való függését fogalmazza meg, ahol nem tudunk állandó értéket rendelni a talányos mondathoz. Ám számolótáblázatok, mint véges automaták, képesek modellálni önreferenciát cellák közötti visszacsatolás segítségével. Az L2 C2 cellában szereplő tagadást kifejező igazságfüggvény bemeneti értéke az L0 C2 cella tartalma, ide kerül visszacsatolva az L2 C2 cellában szereplő igazságfüggvény faktuális értéke. Ekkor a ’hazug’ mondat értéke az ’igaz’ és a ’hamis’ között váltakozik az időben. Egyértelmű értéke lesz a hazugnak ha megszüntetjük a visszacsatolást és a hazugnak állandó bemeneti értéket adunk. Ha viszont metanyelvi szinten a mondat faktuális értékét változtatjuk meg ’igaz’-ról pl. ’igaz1’ re, akkor ez a faktuális érték kerül vissza a hazug mondat bemenetére, amire viszont nincs értelmezve a mondat bemenete, és így a hazug ’értelmetlen’ értéket ad ki a kimenetén. Ebben a modellben tehát a különböző nyelvi szinteken különböző igazság predikátumokat alkalmazva a ’hazug’ értelmetlen mondatnak minősül, ha viszont nyelvi szintek megkülönböztetése nélkül a két munkalapon egyazon jelet használunk az igazság jelölésére, akkor a modell soha nem kerül állandósult állapotba, hanem váltakozva hol az ’igaz’ majd a ’hamis’ értéket adja ki eredményül.

2 – az „erős hazug”.[xvi] Ennek modellje az sliar.xls táblázat munkalapjain található. Az L0 munkalap C4 cellájában az a mondat szerepel, hogy az A4 cella tartalma kisebb mint a B4 cella tartalma. Ez a mondat pontosan akkor igaz, ha A4 kisebb mint B4, és hamis más esetben. Valóban, a cellákba különböző számokat írva, az L2 munkalap C4 cellájában az ’igaz’ vagy ’hamis’ értékeket látjuk attól függően, hogy az L0 munkalap cellái között fennáll-

e a reláció, vagy sem. L2 nyelv logikai értékékei más jelek is lehetnek megkülönböztendő a metanyelv szemantikai predikátumait a tárgyelv szemantikai predikátumaitól. Válasszuk az Igaz1 értéket annak kifejezésére hogy az A4 cellában lévő szám kisebb mint a B4 cella tartalma, és Hamis1 értéket pedig más esetben. Ehhez nem kell mást tennünk, mint átírni az L2 munkalap F2 és F3 cellájában lévő adatokat. Ezek után vizsgájuk meg azt a mondatot, hogy »az L0 munkalap C2 cellájának az értéke nem az ’igaz’«. Különös módon a C2 cella értéke nem más, mint az előző »« idézőjelek között szereplő mondat metanyelvi szintű igazságértéke. Ez a mondat is igaz1 értékű, ha megfelel a tényeknek, és hamis1 máskor. Alkalmaztuk a korábbi megfontolásunkat, és az ’igaz1, hamis1’ szemantikai predikátumokat alkalmaztuk metanyelvi szintem, az L2 munkalapon. Mit mutat ezek alapján a modell? Azt mutatja, hogy a mondat igaz1 értékű, mivel az L0 munkalap C2 cellájában az szerepel, hogy ’igaz1’, ami nem azonos az ’igaz’ értékkel. Mivel nem azonos, ezért a neki megfelelő érték metanyelvi szinten az ’igaz1’, annak megfelelően, hogy a mondat megfelel a tényeknek. Ez az érték – a mondat metanyelvi igazságértéke – L2 munkalap C2 cellájában jelenik meg és azonos az L0 munkalap C2 cellájának érétkével. Csakhogy a mondat éppen ennek a cellának a tartalmáról állít valamit, nevezetesen azt, hogy tartalma nem az ’igaz’. A mondat igazságértéke tehát visszahat a mondat igazságfeltételére. Ilyen módon fejezi ki a modell a mondat szemantikai önreferenciáját. Mi történik ha a nyelvi szinteket megszüntetve metanyelvi szinten is az ’igaz, hamis’ szemantikai predikátumokat használjuk? A modell ekkor vég nélkül próbálja meghatározni a mondat igazságértékét, de soha nem jut állandósult állapotba, és egy értékhez sem közelít, hanem váltakozva hol az ’igaz’ majd a ’hamis’ értéket adja ki eredményül.

Összefoglalás

Egy körbenforgó logikai szerkezetű mondat esetén – ami most szemantikai visszacsatolást, az igazságérték önmagára való visszahatását jelenti – három feladatot kell megoldani:

(a) Leírni a *jelenséget*. Ez természetes nyelven könnyen sikerülhet, és számos megoldás van a probléma tárgyalására a fuzzy halmazoktól a kvantummechanikáig.[xvii] Most én arra tettem javaslatot, hogy a problémát ne formulákkal, hanem működő modellekkel írjam le. Ilyen modell lehet egy fizikailag létező digitális áramkör, vagy egy elektronikus dokumentum is.

A most vizsgált talányos mondatokat csak szemantikailag zárt nyelven lehet megfogalmazni. Ezért ha elkerüljük a szemantikailag zárt nyelvek használatát, akkor nem fenyeget az ilyen típusú paradoxonok réme.[xviii] Az a kérdés azonban nyitva marad, hogy miért nem? Én megkíséreltem megmagyarázni a jelenséget a probléma átfogalmazásával a véges automata modellek segítségével. A mondatok különböző időponhoz tartozó értékelésekhez különböző igazság értékek tartoznak. Ezt az időbeli összefüggést automaták működése ábrázolja. Azt állítottam, hogy a körbenforgó logikai szerkezetű mondat egy *jelenség*, és ezért az időben modellálható olyan módon, amilyen módon sok más időbeli jelenség is modellálható. Erre alkalmasak a véges automaták vagy a nekik megfelelő digitális áramkörök, illetve az ezeket szimuláló számítógépes programok melyekkel:

(1) Le lehet adekvát módon írni egy körbenforgó logikai szerkezetű mondatot.

(2) Lehet egy magyarázatot adni arra, hogy miért hiba ha egy gondolat körbenforgó? Mert olyan automatának felel meg, amelyiknek nincs állandó értékű kimenete, tehát a kimenet nem reprezentálhat igazságértéket, amely időtlen.

(3) Bármilyen olyan véges bonyolult mondat halmazról, amelyik modellálható véges automatával, véges sok lépésben el lehet dönteni, hogy tartalmaz-e körbenforgó logikai szerkezetű mondatot.

Ezzel nem a paradoxonok *univerzális* elkerülésre tettem javaslatot. Elsődleges célom a modellálás, annak a szemléletes megjelenítése, hogy gondolatok, mondatok egy véges halmaza körkörös logikai kapcsolatot tartalmaz. Ha a javasolt modell kimutatja, hogy a mondatok egy halmaza adott tulajdonságú, akkor a mondatok bizonyosan körbenforgóak, viszont nem állítom, hogy minden hibát képes kimutatni. Meglehet, hogy adott esetben a mondatoknak az az elemzése amire a véges automata modell képes nem elégséges. Ugyanakkor a véges automata modellekkel világosan ki lehet mutatni, hogy a szemantikailag zárt nyelv lehetősége olyan automatáknak felel meg, amelyek nem kombinációs struktúrájúak, és adott esetben nincs állandó kimeneti állapotuk. A szemantikai zártságot megengedő nyelvek vagy elméletek helyes mondatainak olyan automaták felelnek meg, melyeknek kimeneti állapota az állandósul állapotban csak a bemeneti állapotoktól függ, a belső állapottól nem. Ezzel szemben a hibás mondatoknak megfelelő automatáknak vagy nincs minden bemenetre állandósult állapota, vagy ha van, az nem mindig függvénye a bementi állapotoknak.

Jegyzetek

i Részletesebben foglalkozom a véges automaták típusaival a „Modális fogalmak a véges automata modellek világában” c. írásomban. http://www.andrasek.hu/ferenc/doc/mod_hun4.doc
ii Ilyen értelemben tekinti a funktorok argumentumait gépek bemenetének Ruzsa Imre is a Bevezetés a modern logikába c. könyvében. Bp. Osiris, 2000. p.22.
iii Ugyanakkor fejlettebb logikai apparátussal már esetleg leírhatók az ilyen struktúrák.
iv Ez az egyik legalapvetőbb számítástechnikai alkotóelem, mivel az alapja a számítógépekben használt átmeneti tárolóknak és számlálóknak.
v Pontosabban ez csak akkor véges automata, ha csak véges sok számot engedünk meg bemeneti jel (állapot) gyanánt.
vi Lásd ezzel kapcsolatban angolul: Hodges, Wilfrid, "Tarski's Truth Definitions", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2001 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2001/entries/tarski-truth/>
magyar nyelven: Sós Vilmos, Modern igazságelméletek. Bp.,Gondolat,1978.; Tarski, Bizonyítás és igazság – válogatott tanulmányok. Gondolat, Bp. 1990.
vii Adok a részhalmaz axiómának egy sajátos interpretációt. Legyen L1 egy a klasszikus elsőrendű logikával kompatibilis nyelv. Legyenek P,Q halmazok L1 nyelv mondat neveinek halmazai, és ρ egy olyan leképezés, amely tetszőleges s mondat névhez magát a mondatot rendeli. A mondatok nevei legyenek egész-számok, tehát P,Q elemei egészszámok, Q elemei pozitív páratlan számok. Az L1 nyelv leírására szolgáló szemantikai predikátumok nem részei L1 nyelvnek, hanem egy nála gazdagabb L2 nyelvnek melyet éppen most olvas, melyet L1-hez képest 'metanyelv'-nek nevezek. L2 része a közlési nyelnek. Az alábbi levezetés L2 nyelven íródott, és a formulák mellé magyarázatokat írtam a közlési nyelven. Tehát az a mondat, hogy "Egy „hazug” típusú mondat nem lehet eleme semelyik P1-nek, azaz nem lehet igaz vagy hamis mondata L1 nyelvnek." nem része a tárgynyelvnek, így nem forrása újabb ellentmondásnak.

$\forall\rho\forall P\exists Q\forall s\,(s\in Q \leftrightarrow (s\in P \,\&\, \rho(s)))$

Ez a részhalmaz axióma sajátos felfogásban. P szándékolt jelentése az igaz vagy hamis mondat nevek, Q jelentése pedig az igaz mondat nevek halmaza.

$\forall P\exists Q\forall s\,(s\in Q \leftrightarrow (s\in P \,\&\, f(s))$ f (1)

ρ egy értéke olyan f függvény, melynek értéke 7 argumentumra az „$7\notin$Igaz2” mondat. 7 a 'hazug' mondat egy

reprezentánsa feltéve, hogy az ’x∈Igaz2’ nyitott mondat valami olyat jelent amit az ’x-igaz’ nyitott mondat alatt

érünk.

$\exists Q\forall s\,(s\in Q \leftrightarrow (s\in P1 \,\&\, f(s)))$ P egy értéke P1 (2)

$\forall s\ (s\in Igaz1 \leftrightarrow (s\in P1\ \&\ f(s)))$ Igaz1 (3)

(Feltesszük, hogy Igaz1 egy ilyen halmaz.)

$7\in Igaz1 \leftrightarrow (7\in P1\ \&\ 7\notin Igaz2)$ (4) ahol $f(7) \leftrightarrow 7\notin Igaz2$

$7\in P1 \rightarrow (7\in Igaz1 \leftrightarrow 7\notin Igaz2)$ (5)

Ha feltesszük, hogy 7∈P1 - azaz a 'hazug' igaz vagy ’hamis’ mondat, olyan mondat amelyik előfordulhat

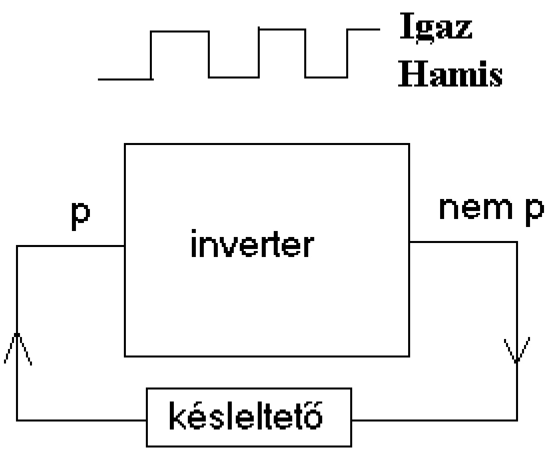
igazságfüggvények argumentumában – és nincsenek nyelvi szintek és ezért egyetlen igazság van – tehát Igaz1=Igaz2 – akkor ellentmondásra jutunk, valamit fel kell adjunk előfeltevéseinkből. Ezek után látszólag két választási lehetőségünk van.

1.: Igaz1><Igaz2, azaz megkülönböztetünk nyelvi szinteket. Ekkor 7∈Igaz1, azaz a ’hazug’ igaz lehet egy

metanyelvi szinten.
Ruzsa Imre írta: „Mi több bátran mondhatjuk, hogy (b’) igazat állít: a benne megnevezett mondat, teljesen határozatlan lévén – sem igaz, sem hamis – állítást nem fejez ki.” Ruzsa Imre szerkesztői kommentárja in: Alfred Tarski, Bizonyítás és igazság. Gondolat. Bp. 1990. p.77 (Az idézetben (b’) = ’ 7∉Igaz2’)
2: Igaz1=Igaz2, nincsenek nyelvi szintek. Ekkor mivel P1 tetszőleges volt, ezért egy „hazug” típusú mondat nem lehet eleme semelyik P1-nek, azaz nem lehet igaz vagy hamis mondata L1 nyelvnek. Viszont ennek a megfogalmazása is valamilyen nyelvi szinten történik. Ha utóbbinak nincs különálló igazság fogalma, akkor ellentmondásra jutunk, így a második lehetőség elesik, nem konzisztens.
Tehát egy mindent átfogó igazság fogalomnak megfelelő halmaz nem létezik. Az antinómia a hazug esetén is és a Russell paradoxon esetén is megcáfolja valaminek a létezését. A klasszikus logika helyett más logikát, a klasszikus Tarski féle igazság fogalom helyett más igazság fogalmat alkalmazva ezek a megfontolások látszólag kikerülhetők. Csakhogy bármely Tarski alapvető belátásait megkerülő megoldásnak, ha el akarja kerülni a hazughoz hasonló belső ellentmondásokat, a kifejtés során egy metanyelvet és a klasszikus logikát kell használnia kiinduló pontul. Így bármelyik alternatíva hallgatólagosan feltételezi Tarski megoldását.
viii Erre utalt K. Popper is. „Legyünk merészek, és vegyük komolyan, hogy vannak állítások, melyek megfelelnek a tényeknek. Bármely elméletnek, amely erről szólni kíván, tudnia kell beszélni (1) valamely nyelv — amelyet a vizsgált nyelvnek vagy tárgynyelvnek mondunk — állításairól és a (2) tényekről és feltételezett tényekről.
(1) Hogy állításokról beszélhessünk, rendelkeznünk kell nevekkel az állítások számára, pl. az állítások idézetneveivel vagy deskriptív neveivel. Ez azt jelenti, hogy bármely korrspondencia elméletet metanyelven kell megfogalmazni, vagyis egy olyan nyelven, amelyen beszélhetünk a kutatásunk tárgyát képező tárgynyelv kifejezéseiről.
(2) Hogy az állítások és a tények közötti relációkról is beszélhessünk, tények leírására is szükségünk van; azaz a tárgynyelven leírható összes ténynek leírhatónak kell lennie metanyelvünkben is. Ily módon a metanyelvnek tartalmaznia kell a tárgynyelvi kifejezések fordításait, vagy a tárgynyelvet saját részként kell tartalmaznia (elkerülve ezáltal a hű fordítások létének kényes problematikáját). Így azt találjuk, hogy bármely elmélet, amely

állítások és tények közötti korrespondenciával és ennélfogva állítások és tények közötti relációkkal foglalkozik, olyan metanyelven kell megfogalmazni, mely a szokásos logikai szavakon kívül három típusú kifejezéseket tartalmaz:
(1) Állítások neveit, tehát valamely tárgynyelv nyelvi kifejezéseinek megnevezéseit: ezek részei a tárgynyelv 'morfológiájának' vagy 'szintaxisának'.
(2) Tényeket (beleértve a nem tényeket) és körülményeket leíró állításokat: vagyis fordításokat a tárgynyelvből a metanyelvbe. (Hogy a fordítás buktatóit elkerüljük, a tárgynyelv, mint már utaltunk rá, beemelhető a metanyelvbe.)
(3) Ezen a két alapvető kifejezéstípuson kívül van egy harmadik is: azon magasabb rendű kifejezések típusa, melyek e két alapvető kifejezéstípus predikátumait és a köztük lévő relációkat jelölik, pl. olyan predikátumok, mint „X megfelel a tényeknek", vagy olyan relációk, mint „X akkor és csak akkor felel meg a tényeknek, ha Y". Ez a három, csaknem nyilvánvaló minimálkövetelmény egy olyan nyelvvel szemben, amelyen egy korrespondenciaelméletet akarunk megfogalmazni."
Karl R. Popper, Some Philosophical Comments on Tarski's Theory of Truth. In: Proceedings of the Tarski Symposium (ed. by L. Henkin and others), American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974, 397-409. Fordította: Pólos László. In: Bizonyítás és igazság – válogatott tanulmányok, Gondolat, Bp. 1990.,423.o.
ix Az első két esetben a tárgynyelv könnyen kibővíthető lenne kvantifikációt és változókat tartalmazó elsőrendű nyelvvé. Az igazság fogalma L1 esetén ekkor is meghatározató volna, viszont a harmadik és negyedik esetben elvi korlátai vannak a kvantifikációs formulák használatának.
x Azt a pontatlanságot, hogy a halmaz elemei mondatok és nem nevek, nézze el nekem az olvasó.
xi Máté András megjegyzése.
xii Az elektronikus modellek innen tölthetőek le: http://www.andrasek.hu/ferenc
xiii Kai-Uwe Kühnberger példája. in: Formal Frameworks for Circular Phenomena (Possibilities of Modeling Pathological Expressions in Formal and Natural Languages), Philosophische Dissertation, Osnabruck, 2002, pp.12.

xiv Ennek a működését mutatja az alábbi ábra:



xv A hazug egy formalizált megfogalmazása az alábbi (7) mondat. A ρ függvény a mondatok neveihez magukat a mondatokat rendeli hozzá. H=hamis, x mondatnevek halmazán értelmezett változó. A mondatok nevei természetes szám jelek.

(T2) $x \in H \equiv \sim\rho(x)$

(7) $\rho(7) \equiv (7)\in H$

(8) $(7)\in H \equiv \sim(7)\in H$ (T2) (7)

Figyeljük meg, hogy a levezetés során fölhasználtuk T2-axiómát.
[xvi] Az erős hazug egy formalizált megfogalmazása az alábbi (7) mondat. A ρ függvény a mondatok neveihez magukat a mondatokat rendeli hozzá. I= igaz, x mondatnevek halmazán értelmezett változó. A mondatok nevei természetes szám jelek.

(T1) $x\in I \equiv \rho(x)$

(7) $\rho(7) \equiv \sim(7)\in I$

(8) $7\in I \equiv \sim(7)\in I$ (T1) (7)

Figyeljük meg, hogy a levezetés során fölhasználtuk T1 axiómát.
xvii A hazug paradoxon újabb megközelítéseit ismerteti Szabó Zoltán „Paradoxon vagy antinómia?" in. Tertium non datur (Válogatott logikai-metodológiai tanulmányok 1984-1990), Osiris, Bp. 2000. 212-230 o. Első megjelenés: Tertium non datur, 5 (1988), 77-88 o. ; angolul: J. Barwise and J. Etchemendy, The Liar. An Essay on Truth and Circularity, Cambridge 1987, CSLI Lecture Notes.
xviii Nevezetes tanulmányában Tarski így fogalmaz: „… nem létezhet olyan ellentmondásmentes nyelv, amelyre érvényesek a logika szokásos törvényei, és amely emellett kielégíti a következő feltételeket: (I) tetszőleges mondat mellett, amely a nyelvben előfordul, az illető mondatnak egy bizonyos egyedi neve is hozzátartozik a nyelvhez; (II) minden olyan kifejezést, amely úgy keletkezik, hogy » x igaz akkor és csak akkor ha p. « -ben a 'p' szimbólumot a nyelv tetszőleges mondatával, az 'x' szimbólumot pedig az illető mondat valamely egyedi nevével helyettesítjük, a nyelv igaz mondatának kell elfogadnunk; (III) a szóban forgó nyelvben megfogalmazható és igaznak elfogadható egy empirikusan megalapozott és ά-val azonos jelentésű premissza." (Ahol ά: 'c nem igaz mondat' azonos c-vel.) Tarski „Az igazság fogalma a formalizált nyelvekben" (ford. Máté András és Ruzsa Imre) in: Bizonyítás és igazság, Gondolat, Budapest. 1990. 73. o.